

نکات و مطالب مهم ریاضی پایه دهم – ویژه دانش آموزان ریاضی-فیزیک و تجربی

فصل اول؛ مجموعه، الگو و دنباله:

بازه ها: زیر مجموعه هایی از R که شامل تمام اعداد حقیقی بین دو عدد مشخص می باشند را بازه یا فاصله می نامیم.

نکته: برای بدست آوردن اجتماع، اشتراک و تفاضل دو بازه، ابتدا آنها را روی محور اعداد رسم می کنیم سپس با توجه به تعریف اجتماع، اشتراک و تفاضل حاصل را به دست می آوریم.

مجموعه های منتهای و نامتناهی: مجموعه ای که تعداد اعضای آن یک عدد حسابی باشد، مجموعه منتهای یا با پایان نامیده می شود.

مجموعه مرجع یا جهانی: در یک موضوع خاص، مجموعه ای که شامل همه ی زیرمجموعه های آن موضوع باشد، مجموعه مرجع یا جهانی نامیده می شود و آن را با U نمایش می دهیم.

اگر U مجموعه مرجع باشد و $A \subset U$ ، آنگاه $U-A$ متمم A می باشد و با A' نمایش داده می شود، به عبارت دیگر A' شامل عضوایی از U می باشد که عضوی از A نیستند.

نکته: به هر دو مجموعه ای که هیچ عضو مشترکی نداشته باشند، دو مجموعه ی جدا از هم یا مجزا گفته می شود.

در حالت کلی اگر A و B دو مجموعه منتهای دلخواه باشند؛

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

دنباله: الگوهای عددی که در آن تعدادی عدد پشت سر هم قرار می گیرند را یک دنباله می نامیم. این اعداد جملات دنباله نامیده می شوند. جمله اول دنباله را با t_1 ، جمله دوم را با t_2 و به همین ترتیب جمله n ام را با t_n نمایش می دهیم.

دنباله حسابی:

دنباله ای که در آن هر جمله به جز جمله اول با اضافه شدن عددی ثابت به جمله قبل از خودش به دست می آید، یک دنباله حسابی نامیده می شود و به آن عدد ثابت، قدر نسبت دنباله می گویند.

جمله n ام یک دنباله حسابی با جمله اول a و قدر نسبت d به شکل $t_n = a + (n-1)d$ می باشد.

واسطه حسابی: اگر بین دو عدد a و b ، یک یا چند عدد دیگر را طوری قرار دهیم که یک دنباله حسابی ایجاد شود، می گوئیم بین دو عدد a و b ، یک یا چند واسطه حسابی قرار داده ایم.

نکته: برای محاسبه قدر نسبت، هنگامی که بین دو عدد a و b ، n واسطه حسابی درج می کنیم، از فرمول زیر استفاده می کنیم؛

$$d = \frac{b-a}{n+1}$$

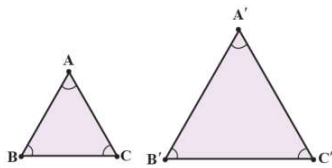
دنباله هندسی: دنباله ای است که در آن هر جمله (به جز جمله اول) از ضرب جمله قبل از خودش در عددی ثابت به دست می آید. این عدد ثابت را قدر نسبت دنباله می نامیم. جمله n ام یک دنباله هندسی به صورت $t_n = ar^{n-1}$ می باشد. (a جمله اول و r قدر نسبت است)

واسطه هندسی: اگر بین دو عدد a و b ، یک یا چند عدد دیگر را طوری قرار دهیم که یک دنباله هندسی ایجاد شود، می گوئیم بین دو عدد a و b ، یک یا چند واسطه هندسی قرار داده ایم.

نکته: برای محاسبه قدر نسبت، هنگامی که بین دو عدد a و b ، n واسطه هندسی درج می کنیم، از فرمول زیر استفاده می کنیم؛

$$r = \sqrt[n+1]{\frac{b}{a}}$$

فصل دوم ؛ مثلثات :

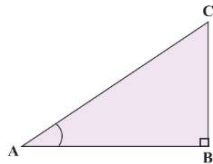


تشابه : می دانیم دو شکل را متشابه گویند هرگاه ضلع ها به یک نسبت تغییر کرده باشند و اندازه زوایا تغییر نکرده باشد .

$$\begin{aligned} \triangle ABC &\sim \triangle A'B'C' \\ \frac{AB}{A'B'} &= \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'} \\ \hat{A} &= \hat{A'}, \hat{C} = \hat{C'}, \hat{B} = \hat{B}' \end{aligned}$$

(۱) هرگاه دو زاویه از مثلثی با دو زاویه از مثلث دیگر برابر باشد ، آن دو مثلث متشابه اند .

(۲) در مثلث های قائم الزاویه ، اگر دو مثلث به غیر از زاویه قائمه ، یک زاویه برابر دیگر داشته باشند ، متشابه اند .



در مثلث قائم الزاویه ABC برای زاویه معین و حاده A ، نسبت های مثلثاتی این زاویه را به سکل زیر تعریف می کنیم ؛

$$\begin{aligned} \tan A &= \frac{\text{طول ضلع مقابل به زاویه A}}{\text{طول ضلع مجاور به زاویه A}} = \frac{BC}{AB} \\ \cos A &= \frac{AB}{AC} \end{aligned}$$

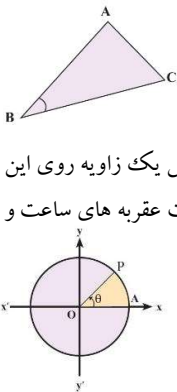
$$\begin{aligned} \cot A &= \frac{\text{طول ضلع مجاور به زاویه A}}{\text{طول ضلع مقابل به زاویه A}} = \frac{AB}{BC} \\ \sin A &= \frac{BC}{AC} \end{aligned}$$

نکته: در هر مثلث قائم الزاویه ، $\cot A = \frac{\cos A}{\sin A}$ و $\tan A = \frac{\sin A}{\cos A}$

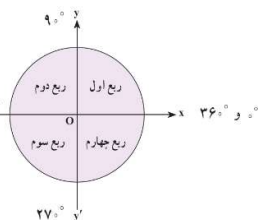
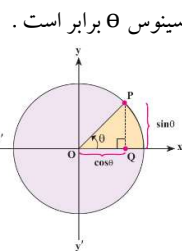
نسبت های مثلثاتی	30°	45°	60°
Sin	1/2	√2/2	√3/2
Cos	√3/2	√2/2	1/2
Tan	1/√3	1	√3
Cot	√3	1	1/√3

نکته : نسبت های مثلثاتی زوایای ۳۰ ، ۴۵ و ۶۰ درجه در جدول مقابل آورده شده است .

نکته : هرگاه در یک مثلث اندازه طول دو ضلع و زاویه بین آن ها را داشته باشیم، مساحت مثلث از رابطه مقابل به دست می آید؛ $\text{مساحت } \triangle ABC = \frac{1}{2} \times AB \times BC \times \sin B$



دایره مثلثاتی: دایره ای به مرکز مبدا مختصات و شعاع ۱ که برای نمایش زاویه ها به کار گرفته می شود ، دایره مثلثاتی نامید می شود . برای نمایش یک زاویه روی این دایره ، از نقطه P شروع به حرکت می کنیم ، برای نمایش زوایای مثبت در خلاف جهت حرکت عقربه های ساعت و زوایای منفی در جهت حرکت عقربه های ساعت و به اندازه زاویه خواسته شده حرکت می کنیم . به عنوان مثال زاویه AOP در شکل زیر یک زاویه مثبت است .



فاصله Q تا مبدا برابر است با کسینوس theta و فاصله نقطه P تا پای عمود (یعنی نقطه Q) با سینوس theta برابر است .

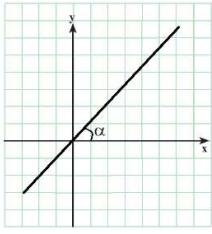
بنابراین محور Xها را محور کسینوس ها و محور Yها را محور سینوس ها می نامیم .

نکته : دو محور عمود بر هم ناحیه را به ۴ قسمت تقسیم می کند که به

شکل مقابل تقسیم بندی می شوند . زوایای ۰ ، ۹۰ ، ۱۸۰ ، ۲۷۰ و ۳۶۰ زوایای

مرزی محسوب می شوند و جزو هیچ کدام از نواحی نیستند .

نکته : برای هر زاویه دلخواه theta ؛ $-1 \leq \sin \theta \leq 1$ و $-1 \leq \cos \theta \leq 1$



نکته: برای محاسبه شیب یک خط، می توان از \tan زاویه ای که خط با محور افقی می سازد استفاده کرد. یعنی: $\tan \alpha =$ شیب خط به عبارت دیگر:

نکته: برای هر زاویه مانند θ می توان ثابت کرد:

$$1) \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \quad 2) \tan^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \quad (\cos \alpha \neq 0) \quad 3) 1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \quad (\sin \alpha \neq 0)$$

نکته: روابط بین θ و $-\theta$:

$$\sin(-\theta) = -\sin \theta \quad \cos(-\theta) = \cos \theta \quad \tan(-\theta) = -\tan \theta \quad \cot(-\theta) = -\cot \theta$$

فصل سوم؛ توان های گویا و عبارت های جبری:

قوانین مهم این فصل به صورت خلاصه در جدول های زیر بیان شده اند.

$a > 0$	زوج n	a دارای دو ریشه n ام $\sqrt[n]{a}$ و $-\sqrt[n]{a}$ است.	$\sqrt[16]{16} = 2$ و $-\sqrt[16]{16} = -2$ چهارم ریشه 16 است.
	فرد n	a دارای یک ریشه n ام $\sqrt[n]{a}$ است.	$\sqrt[32]{32} = 2$ یک ریشه پنجم 32 است.
$a < 0$	زوج n	a دارای ریشه n ام نیست.	$-\sqrt[16]{16}$ یک ریشه چهارم 16 است.
	فرد n	a دارای یک ریشه n ام $\sqrt[n]{a}$ است.	$\sqrt[32]{-32} = -2$ یک ریشه پنجم -32 است.

قانون	مثال
$a > 0 \Rightarrow \sqrt[n]{a} > 0$	$\sqrt[10]{0.1} > 0$
$a < 0 \Rightarrow \sqrt[n]{a} < 0$	$\sqrt[10]{-0.1} < 0$
$0 < a < 1$ $m > n \Rightarrow \sqrt[n]{a} < \sqrt[m]{a}$	$\sqrt[5]{0.125} < \sqrt[10]{0.125}$
$a > 1$ $m > n \Rightarrow \sqrt[n]{a} > \sqrt[m]{a}$	$\sqrt[10]{1.1} > \sqrt[5]{1.1}$
$-1 < a < 0$ $m > n \Rightarrow \sqrt[n]{a} > \sqrt[m]{a}$	$\sqrt[5]{-0.125} > \sqrt[10]{-0.125}$
$a < -1$ $m > n \Rightarrow \sqrt[n]{a} < \sqrt[m]{a}$	$\sqrt[10]{-1.1} < \sqrt[5]{-1.1}$
$a = \pm 1$ $m > n \Rightarrow \sqrt[n]{a} = \sqrt[m]{a}$	$\sqrt[10]{-1} = \sqrt[5]{-1} = -1$ و $\sqrt[10]{1} = \sqrt[5]{1} = 1$

قانون	مثال
$1^n = 1$	$1^{100} = 1$
$0^n = 0 \quad (n \in \mathbb{N})$	$0^{100} = 0$
$a^0 = 1 \quad (a \neq 0)$	$100^0 = 1$
$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad (a \neq 0)$	$2^{-100} = \frac{1}{2^{100}}$
$a^n \times a^m = a^{n+m}$	$2^7 \times 2^8 = 2^{15}$
$a^n \times b^n = (ab)^n$	$2^7 \times 3^7 = 6^7$
$a^n \div a^m = a^{n-m} \quad (a \neq 0)$	$2^{10} \div 2^4 = 2^6$
$a^n \div b^n = \left(\frac{a}{b}\right)^n \quad (b \neq 0)$	$2^{10} \div 3^{10} = \left(\frac{2}{3}\right)^{10}$
$a^n + b^n \neq (a+b)^n$	$2^2 + 3^2 \neq 5^2$
$\underbrace{a^n + a^n + \dots + a^n}_a = a \times a^n = a^{n+1}$	$3^2 + 3^2 + 3^2 = 3 \times 3^2 = 3^3$
$(a^n)^m = a^{nm}$	$(2^3)^4 = 2^{3 \times 4} = 2^{12}$
$(a^n)^m \neq a^{n^m}$	$(2^2)^3 = 2^6 \neq 2^{2^3} = 2^8$

قانون	مثال
$\frac{1}{a^n} = \sqrt[n]{a^{-1}} \quad (a > 0)$	$\frac{1}{81^{\frac{1}{4}}} = \sqrt[4]{81^{-1}} = \sqrt[4]{3^{-4}} = 3^{-1} = \frac{1}{3}$
$\frac{m}{a^n} = \sqrt[n]{a^{\frac{m}{n}}} \quad (a > 0)$	$\frac{5}{81^{\frac{1}{4}}} = \sqrt[4]{81^{\frac{5}{4}}} = \sqrt[4]{3^{20}} = 3^5 = 243$, $4^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{4^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{4^2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{16}}$
$\frac{m}{1^n} = 1$	$\frac{3}{1^5} = 1$
$\frac{kp}{a^{kn}} = \frac{p}{a^n} \quad (a > 0, k \neq 0)$	$\frac{12}{3^{51}} = \frac{12 \times 1}{3^{17 \times 3}} = \frac{1}{3^3} = \frac{1}{27}$
$\sqrt[kn]{a^{kp}} = \sqrt[n]{a^p} \quad (k \neq 0)$	$\sqrt[12]{4^{36}} = \sqrt[12]{2^{72}} = \sqrt[12]{2^{12 \times 6}} = \sqrt[12]{2^{72}} = \sqrt[6]{2^6} = \sqrt[6]{64} = 2$
$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$	$\sqrt[3]{\sqrt{5}} = \sqrt[6]{5}$, $\sqrt[4]{\sqrt{5}} = \sqrt[8]{5}$
$\sqrt[n]{\sqrt[m]{\sqrt[k]{a}}} = \sqrt[mnpn]{a}$	$\sqrt[3]{\sqrt[5]{\sqrt[10]{1.024^3}}} = \sqrt[3 \times 5 \times 10]{1.024^3} = \sqrt[150]{(1.024^3)^3} = \sqrt[150]{1.024^9} = \sqrt[50]{1.024^3} = 2$

همچنین تمامی روابطی که در پایه نهم برای ضرب و تقسیم ریشه دوم و سوم خواندیم، برای ریشه n ام نیز صدق می کنند.

$$\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \begin{cases} \sqrt[n]{ab} & a, b > 0 \text{ و } n \text{ زوج} \\ \sqrt[n]{ab} & a, b \text{ دلخواه و } n \text{ یک عدد طبیعی فرد} \end{cases}$$

نکته: برای هر عدد طبیعی $n \geq 2$ ، توان $\frac{1}{n}$ عدد مثبت a را اینگونه تعریف می کنیم؛

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

باید به این نکته توجه کرد که اگر $a < 0$ باشد، توان $\frac{1}{n}$ آن تعریف نمیشود. به عنوان مثال عبارتی مانند $(-2)^{\frac{1}{3}}$ تعریف نمی شود.

برای اعداد طبیعی n و m ، توان کسری و غیر صحیح $\frac{m}{n}$ عدد مثبت a را اینگونه تعریف می کنیم؛

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

اتحاد ها :

اتحاد مربع دو جمله ای : $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$ **اتحاد مزدوج :** $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$

اتحاد مربع سه جمله ای : $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$ **اتحاد جمله مشترک :** $(a+x)(a+y) = a^2 + (x+y)a + xy$

اتحاد مکعب مجموع : $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ **اتحاد مکعب تفاضل :** $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

اتحاد مجموع و تفاضل مکعبات دو جمله : $(a+b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$ $(a-b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$

نکته: عبارت $(x-1)(x+1) = x^2 - 1$ را در نظر بگیرید، هر یک از عبارت های $(x-1)$ و $(x+1)$ یک شمارنده $x^2 - 1$ محسوب می شوند. همچنین $x^2 - 1$ یک مضرب این دو عبارت محسوب می شود.

مضرب های هر عبارت جبری و یا یک چند جمله ای، از ضرب آن عبارت در عددهای صحیح و یا عبارت های جبری دیگر (و یا همزمان هر دو) به دست می آیند؛

نکته: یک عبارت گویا به ازای مقادیری از متغیر که مخرج آن را صفر می کند، تعریف نمی شود. به عنوان مثال عبارت $\frac{x^2+3x}{x-2}$ به ازای $x=2$ تعریف نمی شود چون مخرج آن صفر می شود.

گویا کردن مخرج های گنگ :

برای گویا کردن مخرج های گنگ با توجه به صورت سوال صورت و مخرج عبارت را یا در مزدوج مخرج و یا در بخش دوم اتحاد مجموع و تفاضل مکعبات و یا ... ضرب می کنیم به گونه ای که عبارت های گنگ (رادیکالی) از مخرج حذف شوند.

اگر در مخرج یک عبارت دو جمله ای با ریشه دو داشتیم، صورت و مخرج را در مزدوج مخرج ضرب می کنیم.

اگر در مخرج یک عبارت دو جمله ای با ریشه سه داشتیم، صورت و مخرج را در بخش دوم اتحاد مجموع و تفاضل مکعبات ضرب می کنیم.

فصل چهارم ؛ معادله ها و نامعادله ها :

شکل کلی یک معادله درجه دوم به شکل $ax^2 + bx + c = 0$ می باشد. در این معادله $a \neq 0$ و a و b و c اعداد حقیقی هستند.

روش های حل معادله درجه دوم :

۱- تجزیه : می دانیم تجزیه یک عبارت یعنی تبدیل کردن آن به حاصل ضرب حداقل ۲ عبارت است. سپس به کمک این نکته که اگر ضرب چند عبارت صفر باشد، حداقل یکی از آن ها صفر است، جواب های معادله را می یابیم.

۲- ریشه گیری : اگر a یک عدد حقیقی نامنفی (بزرگتر یا مساوی صفر) باشد، ریشه های معادله درجه دوم $x^2=a$ عبارتند از : $x = \sqrt{a}$. $x = -\sqrt{a}$

۳- مربع کامل : برای حل معادلات درجه دوم به این روش، در برخی معادلات به اضافه یا کم کردن یک مقدار مشخص به دو طرف معادله، یک طرف را به مربع کامل تبدیل می کنیم و سپس با تجزیه آن، ادامه حل را مانند روش ریشه گیری انجام می دهیم.

۴- روش کلی حل معادله درجه دوم :

اگر یک معادله درجه دوم به فرم $ax^2 + bx + c = 0$ داشته باشیم، می توان Δ (دلتا) را به شکل زیر تعریف کرد و سپس به کمک آن جواب های معادله درجه دوم را پیدا کرد.

$$\Delta = b^2 - 4ac \quad \rightarrow \quad x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

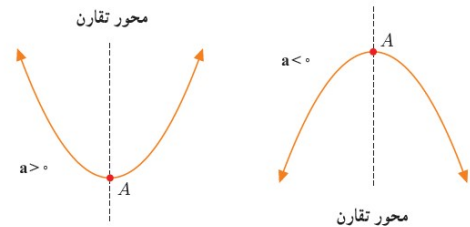
اگر $\Delta > 0$ باشد، معادله دو جواب دارد. $\Delta = 0$ معادله یک ریشه مضاعف دارد و اگر $\Delta < 0$ معادله جواب ندارد.

درس دوم، سهمی :

نمودار هر معادله به شکل $y = ax^2 + bx + c$ را که در آن a و b و c اعداد حقیقی هستند و $a \neq 0$ ، یک سهمی می گوئیم که به یکی از دو شکل زیر است؛

نکته : در معادله یک سهمی، اگر ضریب x^2 عددی مثبت باشد، دهانه سهمی روبه بالا و اگر عددی منفی باشد، دهانه سهمی رو به پایین می باشد.

نکته : میزان باز یا بسته بودن دهانه ی یک سهمی به ضریب x^2 (a) بستگی دارد. اگر $a > 1$ باشد، دهانه سهمی بسته تر و اگر $0 < a < 1$ باشد، دهانه سهمی بازتر می شود.



نکته : خط تقارن یک سهمی، عمود منصف خط واصل دو نقطه از سهمی است که ارتفاع (عرض) یکسان دارند.

نکته : برای سهمی به معادله $y = ax^2 + bx + c$ داریم : $\text{راس سهمی} = \left(-\frac{b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right)$ و معادله محور تقارن سهمی : $x = -\frac{b}{2a}$

نکته : برای پیدا کردن محل برخورد سهمی با محور عرض ها، x را مساوی صفر قرار داده و y را پیدا می کنیم و برای پیدا کردن محل برخورد سهمی با محور طول ها، y را مساوی صفر قرار داده و x را پیدا می کنیم

تعیین علامت : تعیین علامت یعنی مشخص کنیم یک چند جمله ای به ازای چه مقادیری از x ، مثبت، منفی یا صفر می شود.

تعیین علامت چند جمله ای درجه اول :

x	$x < -\frac{b}{a}$	$-\frac{b}{a}$	$x > -\frac{b}{a}$
$y = ax + b$	مخالف علامت a	◦	موافق علامت a

برای تعیین علامت یک چندجمله ای درجه اول به شکل $y = ax + b$

جدول مقابل استفاده می کنیم.

تعیین علامت چند جمله ای درجه دوم :

برای تعیین علامت یک چندجمله ای درجه دوم به شکل $P(x) = ax^2 + bx + c$ ، ابتدا ریشه های معادله $P(x) = 0$ را به دست می آوریم (x_1, x_2) ، سپس طبق جدول زیر عمل می کنیم؛

x	x_1	x_2	
$P(x)$	موافق علامت a	مخالف علامت a	موافق علامت a

الف) اگر دو ریشه متمایز داشت :

x	x_1
$P(x)$	موافق علامت a ◦ موافق علامت a

ب) اگر یک ریشه مضاعف داشت :

x	برای هر $x \in \mathbb{R}$
$P(x)$	+

ج) اگر ریشه نداشت :

نامعادله درجه دوم : نامعادله درجه دوم $ax^2 + bx + c < 0$ را در نظر بگیرید. برای حل این نامعادله می توان به دو روش عمل کرد،

۱- تعیین علامت ۲- روش هندسی

نکته : برای حل به کمک هر کدام از روش ها لازم است همه ی عبارت ها را به یک طرف تساوی منتقل کنیم و طرف دیگر تساوی را برابر صفر قرار دهیم.

نکته : یک عبارت درجه دوم همواره مثبت است اگر $a > 0$ و $\Delta < 0$ و همواره منفی است اگر $a < 0$ و $\Delta < 0$

۱- اگر $|u| \leq a$ سپس $-a \leq u \leq a$.

۲- اگر $|u| \geq a$ سپس $u \geq a$ یا $u \leq -a$.

فصل پنجم ، تابع :

یک تابع از مجموعه A به مجموعه B، رابطه ای بین این دو مجموعه است که در آن به هر عضو A، دقیقاً یک عضو B نسبت داده می شود

نکته : اعضای یک تابع را می توان به شکل زوج های مرتب و همچنین نمودار مختصاتی نمایش داد .

نکته : ترتیب نوشتن اعداد در هر زوج مهم است ، زیرا با جابجا کردن اعداد مختصات نقطه مورد نظر تغییر می کند ، به همین دلیل به این نقاط یک زوج مرتب گفته می شود.

نکته : هنگامی که یک رابطه به صورت زوج مرتب نوشته می شود ، این رابطه زمانی یک تابع است که هیچ دو زوج مرتب متمایزی در آن مولفه اول یکسان نداشته باشند.

دامنه تابع : مجموعه ای شامل همه ی مولفه های اول یک تابع را ، دامنه آن تابع می نامند . (تغییرات تابع روی محور X ها همان دامنه است.)

بُرد تابع : مجموعه ای شامل همه ی مولفه های دوم یک تابع را ، برد آن تابع می نامند . (تغییرات تابع روی محور Y ها همان برد است.)

نکته : تعداد اعضای دامنه ی یک تابع ، همیشه بیشتر یا مساوی تعداد اعضای برد آن است . چرا دامنه نمی تواند کمتر از برد باشد ؟ با یک مثال توضیح دهید .

انواع تابع:

تابع خطی : هر تابع که بتوان آن را به شکل $y=ax+b$ نمایش داد، یک تابع خطی نامیده می شود.

نکته : اگر نمودار یک رابطه داده شده باشد ، این رابطه در صورت یک تابع است که هر خط موازی محور عرض ها (هر خط عمودی) تابع را در یک نقطه قطع کند.

توابع چندجمله ای : توابعی که نمایش جبری آن ها ، چندجمله ای های جبری یک متغیره هستند ، توابع چندجمله ای نامیده می شوند.

تابع همانی : اگر دامنه و برد یک تابع دقیقاً یکسان باشند و هر عضو دامنه به همان عضو در برد نظیر شود ، آن تابع را تابع همانی می نامند.

تابع ثابت : اگر برد یک تابع فقط یک عضو داشته باشد و هر عضو دامنه را به همین یک عضو نظیر کند ، آن را تابع ثابت می نامیم .

نکته : اگر نمایش جبری یک تابع داده شده باشد ولی دامنه و برد آن مشخص نباشد ، بزرگترین مجموعه ممکن را به عنوان دامنه آن در نظر می گیریم و با توجه به دامنه برد آن را تعیین می کنیم .

تابع قدرمطلق : تابعی که هر مقدار در دامنه را به قدر مطلق آن در برد نظیر می کند ، تابع قدرمطلق می نامند . تابع قدر مطلق را با $f(x)=|x|$ یا $y=|x|$ نمایش می دهند.

تابع چندضابطه ای (قطعه ای) : تابعی که با ازای مقادیر مختلف برای دامنه اش ، معادله های مختلفی داشته باشد را تابع چندضابطه ای یا قطعه ای می نامند .

انتقال توابع : اگر نمودار تابع $f(x)$ را داشته باشیم ،

- ۱- برای رسم نمودار $f(x)+a$ ، نمودار $f(x)$ را به اندازه a واحد به بالا منتقل می کنیم .
- ۲- برای رسم نمودار $f(x)-a$ ، نمودار $f(x)$ را به اندازه a واحد به پایین منتقل می کنیم .
- ۳- برای رسم نمودار $f(x+a)$ ، نمودار $f(x)$ را به اندازه a واحد به چپ منتقل می کنیم .
- ۴- برای رسم نمودار $f(x-a)$ ، نمودار $f(x)$ را به اندازه a واحد به راست منتقل می کنیم .

فصل ششم ، شمارش ، بدون شمردن :

اصل ضرب : اگر عملی از دو قسمت مختلف تشکیل شده باشد که قسمت اول به a روش و قسمت دوم به b روش قابل انجام باشد ، این عمل به $a \times b$ روش قابل انجام است . (برای انجام عمل مورد نظر هر دو مرحله نیاز است .)

اصل جمع : اگر عملی را بتوان به دو روش کلی انجام داد ، به طوری که روش اول به a روش و روش دوم به b روش قابل انجام باشد ، این عمل به $a+b$ روش قابل انجام است . (عمل مورد نظر نهایتاً قرار است به یک روش انجام شود .)

روش به دست آوردن تعداد شمارنده های یک عدد طبیعی :

برای به دست آوردن تعداد شمارنده های یک عدد طبیعی ، ابتدا لازم است عدد را به شمارنده های اول آن تجزیه کنیم ؛

$$504 = 2^3 \times 3^2 \times 7$$

سپس توان های شمارنده های اول را با یک جمع می کنیم و در هم ضرب می کنیم .

$$(3 + 1) \times (2 + 1) \times (1 + 1) = 24$$

برای به دست آوردن شمارنده های زوج ، همه توان ها را با یک جمع می کنیم ، به جز توان ۲!

جایگشت :

فاکتوریل : اگر n یک عدد طبیعی باشد ، حاصل ضرب اعداد طبیعی و متوالی از ۱ تا n را n فاکتوریل می خوانیم و با نماد $n!$ نشان می دهیم . مطابق این تعریف :

$$n! = n \times (n - 1) \times (n - 2) \times \dots \times 2 \times 1$$

نکته : طبق قرار داد $0! = 1$ می باشد.

$$n(n - 1)(n - 2) \dots (n - k) = \frac{n!}{(n - k)!} \quad \text{نکته : می توان ثابت کرد :}$$

جایگشت : اگر چند شیء متمایز داشته باشیم ، به هر حالت چیدن آن ها کنار هم یک جایگشت از آن اشیاء گفته می شود .

طبق اصل ضرب تعداد جایگشت های n شیء متمایز در کنار هم برابر است با $n!$.

نکته : اگر n شیء داشته باشیم که n_1 تا n_k از آن ها از یک نوع ، n_2 تا n_k از آن ها از نوع دوم ، ... و n_k تا از آن ها از نوع k ام باشند ، تعداد جایگشت های آن ها کنار هم برابر است

$$\frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!} \quad \text{با :}$$

توزیب : اگر بخواهیم Γ شیء از بین n شیء متمایز انتخاب کنیم ، به نحوی که هر انتخاب متمایز از دیگر انتخاب ها باشد (تکرار نداشته باشیم) طبق رابطه زیر عمل

$$p(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!} \quad n \geq r \quad \text{می کنیم ؛}$$

به هر جایگشت Γ شیء از بین n شیء متمایز یک **توزیب** Γ تایی از n شیء متمایز گفته می شود . تعداد ترتیب های Γ شیء از بین n شیء متمایز را با $p(n, r)$ نمایش می دهند.

توزیب : به هر انتخاب انتخاب Γ شیء از n شیء متمایز که ترتیب انتخاب شدن اشیاء در آن اهمیتی نداشته باشد یا به عبارتی به هر زیر مجموعه Γ عضوی از یک مجموعه n عضوی ، یک **ترکیب** Γ تایی از n شیء می گویند .

$$C(n, r) = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r! \times (n-r)!} \quad (n \geq r) \quad \text{تعداد ترکیب های } r \text{ تایی از } n \text{ شیء متمایز را با } C(n, r) \text{ یا } \binom{n}{r} \text{ نمایش می دهند که برابر است با :}$$

نکته: اگر محل قرار گیری اعضا یا ترتیب انتخاب آن ها مهم باشد، از ترتیب استفاده می کنیم، در غیر این صورت از ترکیب استفاده می شود.

نکته: با توجه به تعریف ترکیب می توان نشان داد:

$$\begin{aligned} \binom{n}{0} &= 1 \xrightarrow{\text{مثال}} \binom{10}{0} = 1 \\ \binom{n}{1} &= n \xrightarrow{\text{مثال}} \binom{10}{1} = 10 \\ \binom{n}{2} &= \frac{n(n-1)}{2} \xrightarrow{\text{مثال}} \binom{10}{2} = \frac{10 \times 9}{2} = 45 \\ \binom{n}{r} &= \binom{n}{n-r} \xrightarrow{\text{مثال}} \binom{10}{4} = \binom{10}{6} \end{aligned}$$

$$\binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r} = \binom{n}{r} \quad \text{رابطه پاسکال:}$$

نکته: طبق اصل ضرب تعداد زیر مجموعه های یک مجموعه n عضوی برابر است با 2^n .

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n \quad \text{نکته:}$$

فصل هفتم؛ آمار و احتمال

درس اول: احتمال یا اندازه گیری شانس

تعریف: پدیده‌ها یا آزمایش‌هایی که نتیجه آن‌ها به طور دقیق قابل پیش‌بینی نباشد، اما از همه حالت‌های ممکن در به وقوع پیوستن آن‌ها مطلع باشیم را **پدیده‌های تصادفی** یا **آزمایش‌های تصادفی** می‌نامیم.

تعریف: مجموعه همه حالت‌های ممکن رخ دادن یک پدیده یا آزمایش را **فضای نمونه** می‌نامیم.

تعریف: اگر فضای نمونه‌ای را با S نمایش دهیم، هر زیرمجموعه S مانند A را یک **پیشامد تصادفی** در S می‌نامیم.

قوانین دمورگان: اگر A و B پیشامدهایی در فضای نمونه‌ای S باشند، داریم:

$$(A \cup B)' = A' \cap B' \qquad (A \cap B)' = A' \cup B'$$

قانون تفاضل: اگر A و B پیشامدهایی در فضای نمونه‌ای S باشند، داریم:

$$A - B = A \cap B'$$

نکته: اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند و $A \cap B = \emptyset$ ، آنگاه A و B را دو **پیشامد ناسازگار** می‌نامیم.

احتمال رخداد یک پیشامد: اگر S فضای نمونه‌ای یک آزمایش تصادفی باشد و A یک زیرمجموعه آن، به طوری که A یک پیشامد در فضای S باشد،

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} \quad \text{احتمال رخداد پیشامد } A \text{ عبارت است از:}$$

نکته: برای هر پیشامد مانند A ، مقدار $n(A)$ حداقل برابر صفر و حداکثر برابر یک است، بنابراین احتمال رخ دادن یک پیشامد عددی بین صفر و یک است.

نکته: اگر A و B پیشامد هایی در فضای نمونه ای S باشند، داریم:

$$n(A') = n(S) - n(A)$$

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

نکته: اگر A و B پیشامد هایی در فضای نمونه ای S باشند، داریم:

$$P(\emptyset) = 0$$

$$P(S) = 1$$

$$P(A) + P(A') = 1$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$$

آمار: مجموعه ای از اعداد، ارقام و اطلاعات است که به این اطلاعات داده های آماری می گویند.

علم آمار: مجموعه ای از روش ها شامل؛

- ۱- جمع آوری اطلاعات،
- ۲- سازماندهی و نمایش داده ها،
- ۳- تحلیل و تفسیر داده ها،
- ۴- و در انتها نتیجه گیری، قضاوت و پیش بینی مناسب در مورد پدیده ها و آزمایش های تصادفی است.

جامعه: به مجموعه تمام افراد یا اشیایی که در مورد یک یا چند ویژگی آن ها تحقیق صورت می گیرد، جامعه یا جمعیت می گویند و هر یک از این افراد یا اشیا را عضو جامعه می نامند.

به تعداد اعضای جامعه، اندازه جامعه یا حجم جامعه می گویند.

نمونه: به بخشی از جامعه که به طور تصادفی برای مطالعه انتخاب می شود، نمونه می گویند و هر یک از افراد یا اشیا انتخاب شده را عضو نمونه می نامند.

به تعداد اعضای نمونه، اندازه نمونه یا حجم نمونه می گویند.

نکته: همیشه نمونه زیرمجموعه ای از جامعه است، بنابراین اندازه نمونه از اندازه جامعه کوچکتر است.

سرشماری: اگر تمام اعضای جامعه را مورد مطالعه قرار دهیم، یعنی اعضای نمونه و اعضای جامعه کاملاً یکسان باشند، می گوئیم سرشماری کرده ایم.

فقط در سرشماری اندازه جامعه و اندازه نمونه برابراند و اعضاً تصادفی انتخاب نمی شوند.

متغیر: به یک ویژگی از اعضای جامعه که مورد بررسی و مطالعه قرار می گیرد و معمولاً از یک عضو به عضو دیگر تغییر می کند، متغیر می گویند و به عددی که به ویژگی یک عضو نسبت داده می شود، مقدار متغیر می گویند.

متغیر کیفی: قابل اندازه گیری نیست (توصیفی است)

متغیر کمی: قابل اندازه گیری است.

ترتیبی: مانند سطح تحصیلات افراد، مراحل هضم غذا و ...

پیوسته: مانند وزن، قد و ...

اسمی: مانند گروه خونی افراد، جنسیت و ...

گسسته: مانند تعداد فرزندان خانواده، تعداد طبقات ساختمان ها و ...